Artículo Original | Original Article

QuanTUNAB
Vol. 3, Núm. 1, e83, ene-jun, 2024
e-ISSN: 2664-3014
DOI: 10.52807/qunab.v3i1.83

Presentado: 16/06/2024 **Aceptado:** 25/07/2024 **Publicado:** 31/12/2024

Una nota sobre las álgebras simples centrales

A note on central simple algebras

Victor López Solís[1]

[1] Universidad Nacional de Barranca, Lima, Perú

RESUMEN

En esta nota mostramos una característica muy interesante de las álgebras simples centrales, esto es, siempre que se ubican en la parte par de una superálgebra lo hacen de una manera muy particular. De hecho, la propiedad del resultado principal caracteriza a las álgebras simples centrales de dimensión finita.

Palabras claves: Superálgebra asociativa, teorema de factorización de Kronecker, superbimódulo asociativo.

ABSTRACT

In this note we show a very interesting characteristic of simple central algebras, that is, whenever they are located in the even part of a superalgebra they do so in a very particular way. In fact, the principal result property characterizes central simple finite-dimensional algebras.

Keywords: Associative superalgebra, Kronecker factorization theorem, associative superbimodule.

MSC classification (2020): 16D20, 16D70, 16D90.

Cómo citar / Citation: López, V. (2024). Una nota sobre las álgebras simples centrales. QuanTUNAB, 3(1), e83. https://doi.org/10.52807/qunab.v3i1.83

*Victor López Solís - vlopez@unab.edu.pe (autor de correspondencia)

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Superálgebras y superálgebras asociativas

En este artículo, F denotará un cuerpo. Recordemos que un **álgebra** A es un espacio vectorial sobre F, en el cual está definida una operación binaria bilineal $\cdot : A \times A \to A$. Asimismo, un **subálgebra** B de un álgebra A es un subespacio vectorial tal que $BB \subseteq B$.

Un **álgebra asociativa** es un álgebra A sobre F, donde la operación binaria bilineal $\cdot : A \times A \to A$ es llamada **multiplicación** tal que A satisface la identidad

$$(a,b,c) = 0, \qquad (1)$$

donde $(a,b,c) \coloneqq (ab)c - a(bc)$ es el **asociador** de $a,b,c \in A$.

Una **superálgebra** $A = A_0 \oplus A_1$ sobre F es un super espacio vectorial (un espacio vectorial que está dado como la suma directa de dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo), en la cual está definida una operación binaria bilineal $\cdot : A \times A \to A$ tal que

$$A_i A_j \subseteq A_{(i+j) mod\, 2}$$

para $i, j \in \boldsymbol{Z}_2$. De donde, A_0 es llamada la parte **par** y A_1 es llamada la parte **impar** de A, respectivamente.

Similar al caso de las álgebras, una **subsuperálgebra** $B = B_0 \oplus B_1$ de una superálgebra A es un super subespacio vectorial tal que $B_i B_j \subseteq B_{(i+j) mod\, 2}$.

Una superálgebra A es una **superálgebra asociativa** si A satisface la identidad (1). Además, una superálgebra asociativa A es **simple** si $A^2 \neq 0$ y A no tiene ideales $\boldsymbol{Z}_2$–graduados (esto es, ideales $I = I_0 \oplus I_1$ tales que $I_i I_j \subseteq I_{(i+j) mod\, 2}$).

De aquí en adelante, álgebras y superálgebras serán considerados asociativas con elemento identidad.

El ejemplo más importante de un álgebra simple está dado por $M_n(F)$, el álgebra de las matrices de orden $n \times n$ sobre F. Por otro lado, si F es algebraicamente cerrado, tenemos la superálgebra asociativa simple $\boldsymbol{M}_{(k|h)}(F)$ que está definida como el álgebra de matrices $n \times n$, $n = k + h$, con la siguiente $\boldsymbol{Z}_2$–graduación

$$A_0 = \left\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\} \quad y \quad A_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

respectivamente. Además, se tiene la superálgebra simple

$$Q(n) \coloneqq M_n(F \oplus uF), \; u^2 = 1,$$

donde $Q(n)_0 = M_n(F)$ y $Q(n)_1 = uM_n(F)$. Asimismo, queda claro que

$$Q(n) = M_n(F[u]) = M_n(F) \oplus F[u]$$

con $F[u] \coloneqq F \oplus uF$, $u^2 = 1$.

 DOI: 10.52807/qunab.v3i1.83

Sea A un álgebra y defina el **conmutador** $[a,b] := ab - ba$ de los elementos $a,b \in A$. El **centro** de A está definido por

$$Z(A) := \{a \in A\colon [a,A] = 0\}.$$

Un álgebra A es llamado **simple central** sobre el cuerpo F si A es un álgebra simple que tiene a F como su centro, o sea, cuando $Z(A) = F$. En particular, $M_n(F)$ es simple central.

El siguiente resultado bien conocido resalta un aspecto fascinante de las álgebras simples centrales contenidas en álgebras, el cual está demostrado en el libro de Herstein (Herstein, 1994, Teorema 4.4.2). Este resultado es el clásico Teorema de factorización de Kronecker de Wedderburn (McCrimmon, 2004):

Teorema 1.1. *Sea A un álgebra asociativa con elemento identidad sobre F y supongamos que $A \supset B$, donde B es un álgebra simple central de dimensión finita sobre F que tiene el mismo elemento identidad que A. Entonces, $A = B \oplus_F C_A(B)$.*

El subálgebra $C_A(B) := \{a \in A\colon [a,B] = 0\}$ de A es llamado el **centralizador** de B en A.

Ciertamente no hemos encontrado referencias bibliográficas de generalizaciones del Teorema 1.1, ni en teoría de representación de anillos ni en superálgebras. Motivado por esta carencia, el principal objetivo de este artículo es generalizar el Teorema 1.1 en el ámbito de las superálgebras y, así, describir algunas de sus aplicaciones.

1.2. Álgebra envolvente de Grassmann

Sea G el álgebra de Grassmann generado por el conjunto $\{1, e_1, \dots, e_n, \dots\}$ sobre el cuerpo F tal que

$$e_i^2 = 0, \quad e_ie_j = e_je_i\,,$$

donde 1 y los productos

$$e_{i_1}e_{j_2} \dots e_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k\,,$$

forman una base de G sobre F (vamos a considerar 1 como el producto del conjunto vacío de los elementos e_i). Además, se denota por G_0 y G_1 los espacios generados por los productos de longitudes pares e impares, respectivamente. Entonces, G es la suma directa de esos espacios, $G = G_0 \oplus G_1$, donde

$$G_iG_j \subseteq G_{(i+j) mod\, 2}.$$

En otras palabras, G es una superálgebra sobre F.

En la subsección 1.1 se definió una superálgebra asociativa como una superálgebra que satisface la identidad (1). Sin embrago, usando la definición del álgebra de Grassmann podemos redefinir dicho concepto de la siguiente manera: Una superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ es llamada una **superálgebra asociativa** si su **envolvente de Grassmann**

$$G(A) := (A_0 \otimes_F G_0) \oplus (A_1 \otimes_F G_1)$$

es un álgebra asociativa.

En general, si $\mathbf{V}$ es una clase arbitrária de álgebras (por ejemplo: asociativas, alternativas, Jordan, Malcev, ...), decimos que $A = A_0 \oplus A_1$ es una **V-superálgebra** si $G(A) \in \mathbf{V}$.

2. METODOLOGÍA

Al inicio se dará a conocer los conceptos básicos de las superálgebras. La demostración del Teorema 3.1 consistirá básicamente en el uso del álgebra envolvente de Grassmann y, además, se aplicará el Teorema 1.1 para finalmente usar la relación entre el centralizador y el álgebra envolvente de Grassmann del supercentralizador. Asimismo, las aplicaciones consistirán en examinar casos particulares de álgebras simples centrales de dimensión finita. Finalmente, se establecerá una equivalencia de categorías de bimódulos.

3. RESULTADO PRINCIPAL

Sea $A = A_0 \oplus A_1$ una superálgebra asociativa sobre F. Se define el **superconmutador** $[a,b]_S := ab - (-1)^{|a||b|} ba$ de los elementos homogéneos $a,b \in A_0 \cup A_1$, donde $|x|$ denotará el **índice de paridad** de un elemento homogéneo x de A: $|x| = i$ si $x \in A_i$. Si S es un subconjunto no vacío de A, la subsuperálgebra

$$C_A^S(S) := \{a \in A_0 \cup A_1 : [a, S]_s = 0\}$$

es llamada el **supercentralizador** de S en A

Asimismo, la superálgebra asociativa $A = A_0 \oplus A_1$ es llamada **superconmutativa** si $C_A^S(A) = A$

A seguir enunciamos y demostramos nuestro resultado principal.

Teorema 3.1. *Sea $A = A_0 \oplus A_1$ una superálgebra asociativa con elemento identidad sobre F y supongamos que $A_0 \supseteq B$, donde B es un álgebra simple central de dimensión finita sobre F que tiene el mismo elemento identidad que A. Entonces, $A = B \otimes_F C_A^S(B)$.*

Demostración. Considere el álgebra envolvente de Grassmann $G(A) = (A_0 \otimes G_0) \oplus (A_1 \otimes G_1)$ de A Identificando $B \cong B \oplus 1$, entonces $B \subseteq A_0 \oplus G_0 \subseteq G(A)$, donde B tiene el mismo elemento identidad que $G(A)$. Ahora, dado que $G(A)$ es un álgebra asociativa que contiene B, el Teorema 1.1 implica

$$G(A) = B \otimes_F C_{G(A)}(B).$$

Mostremos la igualdad $C_{G(A)}(B) = G\left(C_A^S(B)\right)$, esto es, el centralizador de B en $G(A)$ es el álgebra envolvente de Grassmann del supercentralizador de B en A. Ciertamente, si $\hat{x} \in C_{G(A)}(B)$, se tiene $\hat{x} \in G(A)$ tal que

$$[\hat{x},b]=0 \text{ para todo } b \in B. \qquad (2)$$

Dado que $\hat{x} = x \otimes g_x$, con $x \in A_0 \cup A_1$ y algún $0 \neq g_x \in G_0 \cup G_1$ (elemento que depende de x). La igualdad (2) es equivalente a

$$[x \otimes g_x, b \otimes 1]=0,$$

$$(x \otimes g_x)(b \otimes 1)-(b \otimes 1)(x \otimes g_x)=0,$$

$$xb \otimes g_x - bx \otimes g_x=0,$$

$$[x,b] \otimes g_x=0 \text{ y}$$

$$[x,b]=0.$$

La última relación significa que $x \in (C_A^S(B))_0 \cup (C_A^S(B))_1$, luego $\hat{x} \in G\left(C_A^S(B)\right)$. Como la verificación de la igualdad se dio para ambos lados, se concluye que $C_{G(A)}(B) = G\left(C_A^S(B)\right)$.

Finalmente, de $G(A) = B \otimes_F G\left(C_A^S(B)\right)$, se deduce

$$G(A) = B \otimes_F \left((C_A^S(B))_0 \otimes_F G_0 + (C_A^S(B))_1 \otimes_F G_1\right),$$
$$G(A) = (B \otimes_F (C_A^S(B))_0) \otimes_F G_0 + (B \otimes_F (C_A^S(B))_1) \otimes_F G_1,$$
$$G(A) = G(B \otimes_F (C_A^S(B))_0 + B \otimes_F (C_A^S(B))_1),$$
$$G(A) = G(B \otimes_F ((C_A^S(B))_0 + (C_A^S(B))_1)),$$
$$G(A) = G(B \otimes_F C_A^S(B)),$$

del cual, se infiere

$$A = B \otimes C_A^S(B).$$

El teorema está probado.

4. EJEMPLOS Y ALGUNAS APLICACIONES

4.1. Superálgebras

Sea B un álgebra simple central de dimensión finita sobre F y sea $A = B \oplus M$ una super-álgebra simple, entonces por el Teorema 3.1, $A = B \otimes_F C_A^S(B)$, es simple si y solamente si $(C_A^S(B))_0 = F$ y $(C_A^S(B))_1 = 0$.

Sabemos que el álgebra de los cuaterniones $\mathbb{H}$ sobre F es un álgebra simple central que tiene dimensión 4, donde $\mathbb{H}$ puede ser de división o split (no de división, el cual es isomorfo al álgebra de matrices de orden 2 x 2).

Los **cuaterniones de división** es el espacio vectorial sobre F

$$\{x1 + y\mathrm{i} + zj + wk |\ x, y, z, w \in F\},$$

tal que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

Por otro lado, el álgebra de los **cuaterniones split** es el espacio vectorial sobre F

$$\{x1 + y\mathrm{i} + zj + wk |\ x, y, z, w \in F\},$$

tal que

$$i^2 = -1,\ j^2 = 1,\ k^2 = 1,$$
$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

Corolario 4.1. *Sea $A = A_0 \oplus A_1$ una superálgebra asociativa con elemento identidad sobre F tal que $A_0 \supseteq \mathbb{H}$, donde $\mathbb{H}$ tiene el mismo elemento identidad que A. Entonces, $A = \mathbb{H} \oplus_F Z$, donde $Z = C_A^S(\mathbb{H})$.*

Es interesante observar que en general Z no es superconmutativo. Por ejemplo, si $A = M_n(\mathbb{H}[u])$, entonces

$$A = \mathbb{H} \oplus_F M_n(F[u]),$$

de donde $Z = M_n(F[u])$.

El resultado anterior considera a $\mathbb{H}$ tanto como el álgebra de división de los cuaterniones o el álgebra de los cuaterniones split $M_2(F)$. El siguiente resultado considera $B = M_n(F)$ con $n \geq 1$, el cual incluye el caso $n = 2$.

Corolario 4.2. *Sea $A = A_0 \oplus A_1$ una superálgebra asociativa con elemento identidad sobre F tal que $A_0 \supseteq M_n(F)$, donde $M_n(F)$ tiene el mismo elemento identidad que A. Entonces, $A = M_n(F) \oplus_F Z$, donde $Z = C_A^S(M_n(F))$.*

Nuevamente, en general, Z no es superconmutativo.

4.2. Bimódulos y superbimódulos asociativos

4.2.1. Bimódulos asociativos

Sea A un álgebra asociativa sobre F y sea V un $A-$**bimódulo**, esto es, V es un espacio vectorial sobre F tal que sobre V están definidas las multiplicaciones a la izquierda y la derecha por los elementos de A:

$$A \otimes_F V \to V,\ (a \otimes v \to a \cdot v), \qquad V \otimes_F A \to V,\ (v \otimes a \to v \cdot a),$$

donde $a \in A$, $v \in V$. En la suma directa de espacios vectoriales $E = A \oplus V$ se define un producto $*$ por

$$(a_1 + v_1) * (a_2 + v_2) := a_1 a_2 + a_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot a_2,$$

donde $a_1, a_2 \in A$, $v_1, v_2 \in V$. Así, E viene a ser un álgebra sobre F, en el cual A es un subálgebra y V es un ideal con multiplicación nula. El álgebra E es llamado la **extensión split nula** del álgebra A por su bimódulo V. El bimódulo V es llamado un A−**bimódulo asociativo** si la extensión split nula $E = A \oplus V$ es un álgebra asociativa.

4.2.2. Equivalencia de categorías y superbimódulos asociativos

Sean *C* y *D* categorías. Recordemos que las categorías *C* y *D* son **Morita equivalentes** si dado un funtor $\mathbf{F}: C \to D$ existe un funtor $\mathbf{G}: D \to C$ tales que

$$\mathbf{GF} \cong 1_C \text{ y } \mathbf{FG} \cong 1_D,$$

donde $\cong$ denota el isomorfismo natural de funtores.

Tenemos un criterio importante para decidir cuando dos categorías son **Morita equivalentes.**

Proposición 4.3. Sea $\mathbf{F}: C \to D$ un funtor. Entonces, existe un funtor $\mathbf{G}: D \to C$ tal que *C* y *D* son Morita equivalentes si y solamente si $\mathbf{F}$ es fiel y completo, y para cada objeto A' de *D* existe un objeto A de *C* tal que $\mathbf{F}(A)$ y A' son isomorfos en *D,* esto es, existe un isomorfismo contenido en $hom_D(\mathbf{F}(A), A')$.

En la Proposición 4.3, el hecho de que para cada objeto A' de *D* existe un objeto A de *C* tal que $\mathbf{F}(A)$ y A' son isomorfos en *D* es comúnmente llamado de que $\mathbf{F}$ es **esencialmente sobreyectivo** (**denso**).

A seguir vamos establecer una equivalencia de Morita de categorías de superbimódulos.

Los superbimódulos asociativos están definidos de manera similar al caso no graduado (vea 4.2.1). Un bimódulo $V = V_0 \oplus V_1$ sobre una superálgebra asociativa $A = A_0 \oplus A_1$ es llamado un A− **superbimódulo asociativo,** si la extensión split nula

$$A \oplus V = (A_0 \oplus V_0) \oplus (A_1 \oplus V_1)$$

es una superálgebra asociativa.

Ahora, considere Z una superálgebra asociativa con elemento identidad sobre el cuerpo base F. Denotemos por

- $\mathbf{Bimod}_s$−Z la categoría de los superbimódulos asociativos para Z, donde Ob($\mathbf{Bimod}_s$−Z) es la clase de los superbimódulos asociativos sobre Z.

- $\mathbf{Bimod}_s - M_n(Z)$ la categoría de los superbimódulos asociativos para $M_n(Z)$, donde Ob($\mathbf{Bimod}_s - M_n(Z)$) es la clase de los superbimódulos asociativos sobre $M_n(Z)$.

Teorema 4.4. *Las categorías* $\mathbf{Bimod}_s - Z$ *y* $\mathbf{Bimod}_s - M_n(Z)$ *son Morita equivalentes.*

Demostración. El resultado es una adaptación directa de la demostración del Teorema 3.1 de (Solís y Villanueva, 2024). Básicamente consiste en definir un funtor

$$\mathbf{T}: \mathbf{Bimod}_s\text{–}Z \to \mathbf{Bimod}_s\text{–}M_n(Z)$$

y verificar que $\mathbf{T}$ es completo, fiel y esencialmente sobreyectivo (denso). En ese proceso se utiliza apropiadamente el Corolario 4.2.

El teorema está probado.

Ciertamente, el Teorema 4.4 es una generalización del Teorema 3.1 de (Solís y Villanueva, 2024) para superálgebras.

Corolario 4.5. *Cada superbimódulo asociativo* V *sobre* Z *es completamente reducible si y solamente si* $\mathbf{T}$ (V) *es completamente reducible sobre* $M_n(Z)$.

5. DISCUSIÓN

El Teorema 3.1 es una generalización del clásico Teorema de factorización de Kronecker de Wedderburn (Herstein, 1994, Teorema 4.4.2) para superálgebras y, esencialmente, caracteriza a las álgebras simples centrales contenidas en la parte par de las superálgebras asociativas. Así, el resultado se suma a la lista de una serie de resultados llamados "*Teoremas de factorización de Kronecker*" que han sido obtenidos en otras estructuras algebraicas, principalmente en estructuras no asociativas, los cuales, como se ha observado en la subsección 4.2 son sumamente importantes en teoría de representación.

6. CONCLUSIONES

Se obtuvo el Teorema 3.1, el cual es una generalización del clásico Teorema de factorización de Kronecker de Wedderburn. Se aplicó el resultado en ciertos casos particulares, esto es, para el álgebra de los cuaterniones y para el álgebra de matrices de orden n x n. Además, se obtuvo una equivalencia de categorías, el cual demuestra que el Teorema 3.1 es clave para la teoría de representación.

Sería interesante aplicar el Teorema 3.1 para obtener análogos de resultados clásicos de estructura de álgebras asociativas para superálgebras asociativas.

AGRADECIMIENTO

El autor desea agradecer a los árbitros por la lectura cuidadosa y por sugerir mejoras. Asimismo, el trabajo contó con el apoyo de la Resolución de la Comisión Organizadora N° 629 – 2022 – UNAB de la Universidad Nacional de Barranca.

REFERENCIAS

Herstein, I. N. (1994). Noncommutative rings (Vol. 15). American Mathematical Soc.

Solís, V. L., & Villanueva, M. M. (2024). “A categories equivalence of associative bimodules”. International Electronic Journal of Algebra, 1-7.

McCrimmon, K. (2004). A taste of Jordan algebras (Vol. 1). New York: Springer.